Terme

Termumformungen

1. Vereinfachung von Produkten

Halte dich an folgende Reihenfolge:
- Klammern bei Potenzen auflösen
- Vorzeichen des Produkts bestimmen
- Ordnen: Zahlen zuerst, dann Variablen in alphabetischer Reihenfolge
- Produktwert der Zahlen berechnen, bei den Variablen das 1. Potenzgesetz anwenden

Beispiel: $2b^2 \cdot (-2a)^3 \cdot (-a)b^4 = 2b^2 \cdot (-8)a^3 \cdot (-a)b^4 = + 2 \cdot 8a^3ab^2b^4 = 16a^4b^6$

Ü: a) $(-2a^2)^2 \cdot (-\frac{1}{2}b)(-\frac{1}{4})a^2b$; b) $3a \cdot 4b \cdot 5c(-a)^2 \cdot (-b)^3 \cdot (-c)^4$;

2. Vereinfachung von Summen

Gleichartige Summanden addiert man, indem man ihre **Koeffizienten addiert** und die Variable unverändert lässt.
(**Gleichartige Summanden** sind Summanden mit der gleichen Variablen in der gleichen Potenz.)

Beispiel: $2a + 3b + 4a - 5b = (2 + 4)a + (3 - 5)b = 6a - 2b$;
$x - x^2 - 2x^2 - 3x = (1 - 3)x + (-1 - 2)x^2 = - 2x - 3x^2$

Ü: a) $- 2ab - 3ac - 4ab - 5ac$; b) $c^2d - \frac{1}{2}cd^2 + \frac{1}{3}c^2d - cd^2$

Auflösen von Klammern

$... + (- a + b - c) = - a + b - c$;	$... - (- a + b - c) = + a - b + c$

Beispiel: $3 + (4 - a) = 3 + 4 - a = 7 - a$; $x^3 - (- x^2 - 3x + 4) = x^3 + x^2 + 3x - 4$

Ü: c) $(-3 +a) - 5$; d) $2 - (x - 5 + y) + (3 - z) - 1$

3. Umwandlung von Produkten in Summen

Ausmultiplizieren:

Nach dem Distributivgesetz gilt: $\boxed{a \cdot (b + c) = ab + ac; \text{ bzw } a \cdot (b - c) = ab - ac}$

Beispiel: $2(x - 3 + 2y) = 2x - 6 + 4y$; $ab(ab - b) = a^2b^2 - ab^2$

Ü: a) $x^2(- 3x - 4x^2 - 5)$; b) $2(x + 3) - x(3 - y)$;

Multiplikation von Summen:

$$\boxed{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd}$$

Beispiel: $(2 - x)(3 + x) = 6 + 2x - 3x - x^2 = 6 - x - x^2$

Ü: c) $(ab - a)(b - ab)$; d) $(a - 3)(4 + 2a) - (2 + a)(a^2 - 6)$

Binomische Formeln:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.\ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ 2.\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ 3.\ (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \end{array}}$$

Beispiel: $(2 + x)^2 = 4 + 4x + x^2$; $(3c - 4d)^2 = 9c^2 - 24cd + 16d^2$; $(2x + 3)(2x - 3) = 4x^2 - 9$;

Ü: e) $(2 - 3b)^2$; f) $(x^2 + \frac{1}{2}y)^2$; g) $(a - 4b)(a + 4b)$

4. Umwandlung von Summen in Produkte (Faktorisieren)

Ausklammern:

Nach dem Distributivgesetz gilt: $\boxed{ab + ac = a(b + c) \quad \text{bzw.} \quad ab - ac = a(b - c)}$

Beispiel: $2x - 4y + 6 = 2(x - 2y + 3)$; $24x^2y^3 - 16x^3y^2 + 8xy^2 = 8xy^2(3xy - 2x^2 + 1)$

Beachte: Beim Ausklammern wird jeder Summand durch den Term **dividiert**, der ausgeklammert wurde.

Beispiel: $-\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}(x^2 + 6x - \frac{1}{2})$

Ü: a) Klammere vollständig aus! $6ab - 24a^2b + 12b^2$

b) Klammere den Faktor 2 aus ! $\frac{1}{2}x^2 - x - 2$

Binomische Formeln:

Bei geeigneten Termen lässt sich die Umwandlung in ein Produkt mit Hilfe der **binomischen Formeln** durchführen.

Beispiel: $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$; $4x^2 - 8xy + 4y^2 = (2x - 2y)^2$

Ü: c) Faktorisiere so weit wie möglich! $3a^2 - 75$; d) $3x^2 - 6xy + 3y^2$

5. Quadratische Ergänzung

Quadratische Terme der Form $x^2 \pm px + q$ lassen sich durch die **quadratische Ergänzung** $x^2 \pm px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$ und die anschließende Anwendung der **1. bzw. 2. binomischen Formel** auf die ersten drei Summenden in einen Term der Form $\left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$ verwandeln.

Beispiel: $x^2 + 6x - 3 = x^2 + 6x \mathbf{+ 9 - 9} - 3 = (x + 3)^2 - 12$;
$-2x^2 + 10x + 8 = -2(x^2 - 5x - 4) = -2(x^2 - 5x \mathbf{+ 6{,}25 - 6{,}25} - 4) = -2[(x - 2{,}5)^2 - 10{,}25]$
$= -2(x - 2{,}5)^2 + 20{,}5$

Ü: a) $x^2 + x + 1$; b) $-\frac{1}{2}x^2 - 2x$

<u>Extremwerte quadratischer Terme</u>

Hat der quadratische Term die Form $\mathbf{a(x - b)^2 + c}$, ($a \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$), so besitzt er :

wenn a > 0 ist, das Minimum c für x = b
wenn a < 0 ist, das Maximum c für x = b.

Beispiel: $T_1 = -x^2 + 2$; $T_{max} = 2$ für $x = 0$; $T_2 = -(x + 3)^2 - 8$; $T_{max} = -8$ für $x = -3$
$T_3 = 2x^2 - 4$; $T_{min} = -4$ für $x = 0$

Ü: a) $-\frac{1}{2}(a - 1)^2$; b) $3(x + 2)^2 - 2$; c) $-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$;

Lineare Gleichungen und Ungleichungen

1. Zum Lösen einer Gleichung oder Ungleichung verwendet man Äquivalenzumformungen. Jede Umformung muss immer auf beiden Seiten der Gl. oder Ungl. vorgenommen werden.

Bsp.:	$3x - 7 - 2x$	$= 5x + 9 - 4$	Zusammenfassen gleichartiger Terme
$\Leftrightarrow$	$x - 7$	$= 5x + 5 \mid -5x + 7$	Sammeln und Zusammenfassen gleichartiger Terme auf verschiedenen Seiten
$\Leftrightarrow$	$x - 5x$	$= 5 + 7$	
$\Leftrightarrow$	$-4x$	$= 12 \mid :(-4)$	Division durch den Koeffizienten der Variablen
$\Leftrightarrow$	x	$= -3$	
$\Rightarrow$	$\mathbb{L} = \{-3\}$		

Die Lösungsmenge einer Ungleichung enthält die umgeformte Ungleichung selbst.

Bsp.: $3x < 12 \Leftrightarrow x < 4 \Rightarrow \mathbb{L} = \{x \mid x < 4\}$

Das Ungleichzeichen bleibt bei allen Äquivalenzumformungen unverändert, außer man dividiert oder multipliziert mit einer negativen Zahl. (**Inversionsgesetz**)

Bsp.: $-2x > 8 \Leftrightarrow x < -4$

Ü: 1. Löse die folgenden Gleichungen und Ungleichungen.
a) $2a - 3 = 5 + 6a - 8$ b) $3b + 12 < 4 - 7b$ c) $-2c - 9 > c + 4$

2. Um eine Textaufgabe lösen zu können, sollte man einige wichtige Schritte beachten:

- im Text mit verschiedenen Farben das markieren, was gesucht ist
- eine Variable für die gesuchte Größe festlegen
- die Aussage des Textes in einen oder mehrere Terme übersetzen
- aus den Termen eine Gleichung oder Ungleichung bilden
- die Lösung der Gleichung oder Ungleichung bestimmen
- das Ergebnis durch Einsetzen in die Terme überprüfen
- das Ergebnis in einem Antwortsatz wiedergeben

3. Ist eine Gleichung in der Form

$$(ax + b) \cdot (cx + d) = 0$$

gegeben, so spaltet sich die Gleichung zur Lösung in zwei Fälle auf:

(I.) $ax + b = 0$ $\vee$ (II.) $cx + d = 0$ ($\vee$ bedeutet „oder auch“),

da ein Produkt genau dann null ist, wenn einer der Faktoren null ist. Beide Gleichungen werden für sich gelöst und die Teillösungsmengen $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$ angegeben. Die Gesamt-lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist dann die Vereinigungsmenge der beiden Teillösungsmengen:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left\{ x \mid x = -\frac{b}{a} \vee x = -\frac{d}{c} \right\}$$

Ü: 2. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $(2x - 5) \cdot (3x + 4) = 0$.

4. Ist eine Doppelungleichung gegeben, löst man sie in zwei Ungleichungen auf und bildet die Schnittmenge der beiden Teillösungsmengen $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$ zur Lösungsmenge $\mathbb{L}$, da sie beiden Bedingungen zugleich gehorchen muss.

Bsp.: $3x + 1 < 5x - 2 < 9x + 4$

$\Leftrightarrow$ $3x + 1 < 5x - 2 \wedge 5x - 2 < 9x + 4$ ($\wedge$ bedeutet „und zugleich“)

$\Leftrightarrow$ $-2x < -3 \wedge -4x < 6$

$\Leftrightarrow$ $x > 1{,}5 \wedge x > -1{,}5$

$\Rightarrow$ $\mathbb{L}_1 = \{ x \mid x > 1{,}5\} \wedge \mathbb{L}_2 = \{ x \mid x > -1{,}5\}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{ x \mid x > 1{,}5 \wedge x > -1{,}5\} = \{ x \mid x > 1{,}5\}$

Ü: 3. Bestimme die Lösungsmenge der Doppelungleichung $5y + 6 < y - 2 < 2y + 9$

Bruchterme und Bruchgleichungen

Bruchterme: Terme, bei denen der Nenner mindestens eine Variable enthält.

Definitionsmenge: Alle Zahlen der Grundmenge, für die der Nennerterm **nicht** Null ist, bilden die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ des Bruchterms

Beispiel: $\frac{4}{x}$ $\mathbb{D} = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$; $\frac{x}{x^2-1}$ $\mathbb{D} = \mathbb{Q}\backslash\{-1; 1\}$

Rechnen mit Bruchtermen:

Es gelten grundsätzlich die Rechenregeln für rationale Zahlen. (GW 6. Kl.) Beachte aber:

- bei Termumformungen sind ursprünglicher und umgeformter Term nur in der Definitionsmenge äquivalent, in der **beide** Terme definiert sind.

- beim **Kürzen** müssen Zähler und Nenner zunächst **faktorisiert** werden. Gleiches gilt für den Nenner, wenn man Bruchterme **gleichnamig machen** will.

Beispiele: Kürze! $\frac{4x-4}{x^2-1} = \frac{4(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{x+1}$ $\mathbb{D} = \mathbb{Q}\backslash\{-1; 1\}$

Addiere! $\frac{1}{4x+12} + \frac{4x}{x^2-9} =$

Nenner faktorisieren:	$4x + 12 = 4(x + 3)$
	$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$
Hauptnenner:	$4(x + 3)(x - 3)$

$= \frac{1(x-3)+16x}{4(x+3)(x-3)} = \frac{17x-3}{4(x+3)(x-3)}$ $\mathbb{D} = \mathbb{Q}\backslash\{3; -3\}$

Bruchgleichungen

Bruchgleichungen sind Gleichungen mit mindestens einem Bruchterm.

Lösungsbeispiel: $\frac{4}{x-1} = \frac{6}{x}$ - Definitionsmenge bestimmen: $\mathbb{D} = \mathbb{Q}\backslash\{0;1\}$

- Hauptnenner suchen: $(x - 1)x$

$\frac{4}{x-1} = \frac{6}{x}$ $/ \cdot (x-1)x$ - Bruchgleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren

$4x = 6(x - 1)$ - Kürzen

$4x = 6x - 6$ $/ -6x$ - Gleichung nach x auflösen
$-2x = -6$ $/ :(-2)$
$x = 3$
$\mathbb{L} = \{3\}$ - Lösungsmenge angeben

In Bruchgleichungen der Form $\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_3}{T_4}$ können die Nenner auch durch " **Überkreuz Multiplizieren** " beseitigt werden: $T_1 \cdot T_4 = T_2 \cdot T_3$

Ü: 1. Vereinfache! Gib jeweils die Definitionsmenge an!

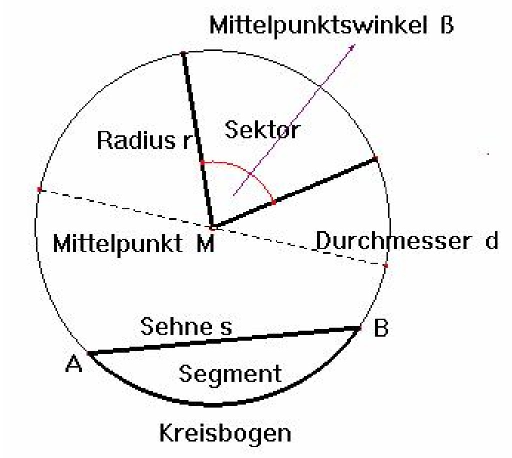
a) $\frac{4}{2x-6} - \frac{12}{x^2-9}$; b) $\frac{x+4}{x-4} : \frac{2x+8}{3x-12}$

2. Bestimme die Definitionsmenge und gib die Lösungsmenge an! $G = \mathbb{Q}$

$$\frac{3x-4}{3x-6} = \frac{2x+5}{2x-4}$$

DER KREIS

1. Ein Kreis k ist festgelegt durch: **Mittelpunkt M** und **Radius r** ⇒ **k (M; r)**



Merke: Die Verbindungsstrecke zweier Kreispunkte A und B heißt **Sehne s**.Sie teilt die Kreislinie in zwei **Kreisbögen**. Das von Kreissehne und Kreisbogen begrenzte Flächenstück ist ein **Kreissegment**. Ein von zwei Radien und einem Bogen begrenztes Flächenstück ist ein **Kreissektor**, er wird bestimmt durch den **Mittelpunktswinkel ß.**

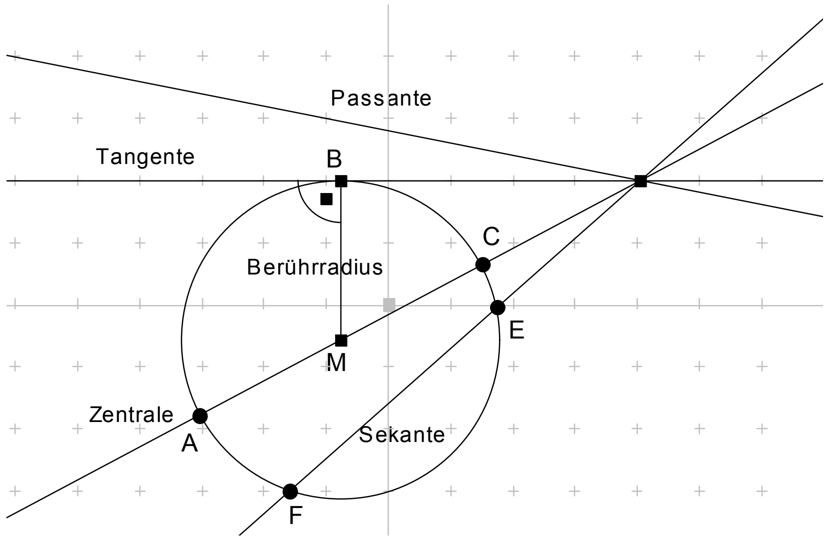
2. Lagebeziehung von Kreis k und Gerade

Passante p : $p \cap k = \emptyset$

Tangente t : $t \cap k = \{ B \}$

Zentrale z : $z \cap k = \{ A; C \}$

Sekante s : $s \cap k = \{ E; F \}$

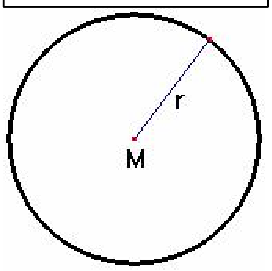


3. Berechungen am Kreis

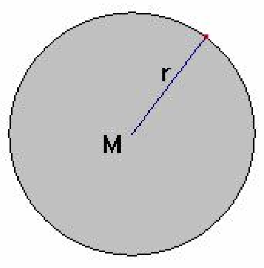
Für die **Kreiszahl** π wird der Wert $\pi \approx 3{,}14$ oder $\pi \approx \frac{22}{7}$ benutzt.

Für den Kreisumfang U gilt: Für den Inhalt der Kreisfläche A gilt:

$\boxed{U = 2 \cdot r \cdot \pi}$



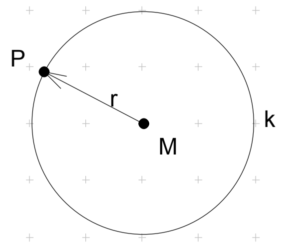
$A = \boxed{r^2 \cdot \pi}$



Geometrische Ortslinien

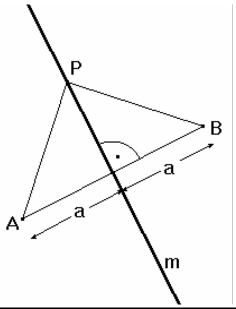
1. Kreis

Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte, die von ***einem Punkt die gleiche Entfernung*** haben.



Mengenschreibweise: $k\,(M;\,r) = \{\,P \mid \overline{PM} = r\,\}$

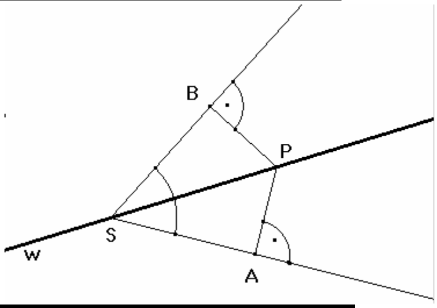
2. Mittelsenkrechte



Die Mittelsenkrechte ist der geometrische Ort aller Punkte, die von ***zwei Punkten die gleiche Entfernung*** haben.

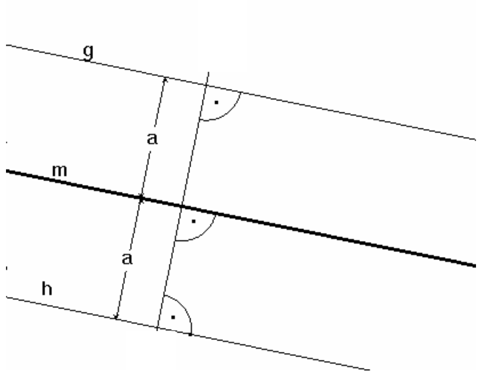
Mengenschreibweise: $m_{[AB]} = \left\{ P \,\middle|\, \overline{AP} = \overline{BP} \right\}$

3. Winkelhalbierende



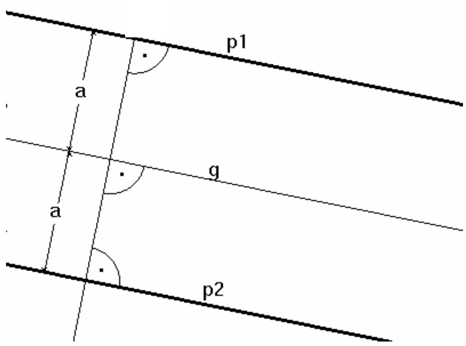
Die Winkelhalbierende ist der geometrische Ort aller Punkte, die von ***beiden Schenkeln eines Winkels den gleichen Abstand*** haben.

4. Mittelparallele:

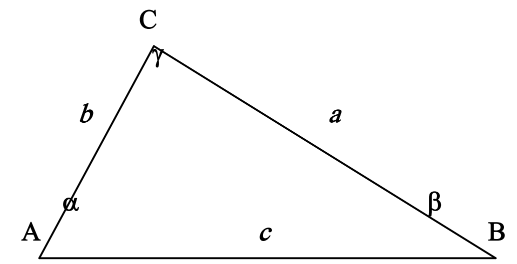


Die Mittelparallele zweier paralleler Geraden ist der geometrische Ort aller Punkte, die von den ***beiden Geraden den gleichen Abstand*** haben.

5. Parallelenpaar:



Das Parallelenpaar zu einer Geraden ist der geometrische Ort aller Punkte, die von ***einer Geraden den gleichen Abstand a*** haben.



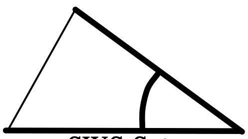
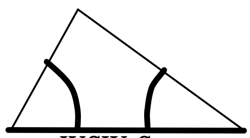
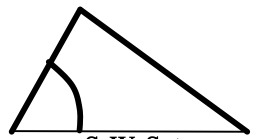
Bezeichnungen im Dreieck
Die Bezeichnung der Eckpunkte (A, B, C), der Seiten (*a*, *b*, *c*) und der Winkel (α, β, γ) ist stets gegen den Uhrzeigersinn.

Beziehungen im Dreieck
In jedem Dreieck liegt der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber.

Dreiecksungleichung
Die Summe aus zwei Seitenlängen ist stets größer als die dritte Seitenlänge.

$a + b > c$ und $a + c > b$ und $b + c > a$

Kongruenz: Dreiecke sind ***kongruent*** (deckungsgleich) zueinander, wenn sie durch eine der Kongruenzabbildungen (Parallelverschiebung, Achsenspiegelung und Drehung) aufeinander abgebildet werden können.
Da man zur eindeutigen Konstruktion eines Dreiecks mindestens drei Bestimmungsstücke benötigt, sind Dreiecke daher auch kongruent, wenn sie in

allen Seitenlängen übereinstimmen.	zwei Seitenlängen und dem Maß ihres Zwischenwinkels übereinstimmen.	einer Seitenlänge und den Maßen der daran anliegenden Winkel übereinstimmen.	zwei Seitenlängen und dem Maß des Winkels, der der größeren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen
 SSS-Satz	 SWS-Satz	 WSW-Satz	 SsW-Satz

Übung: Konstruiere das Dreieck ABC mit folgenden Angaben:

a) a = 7 cm; b = 4 cm; c = 5 cm
b) a = 5 cm; c = 7 cm; β = 40°
c) c = 6 cm; α = 50°; β = 60°
d) a = 7 cm; b = 4 cm; α = 40°

Der geometrische Beweis

Mithilfe der Kongruenzabbildungen und der Sätze über kongruente Dreiecke lassen sich Behauptungen bzw. Vermutungen geometrisch begründen. Der durchzuführende Beweis muss, um allgemeine Gültigkeit zu haben, ein bestimmtes Schema einhalten, er muss logisch und in sich richtig (konsistent) sein.

- ***Behauptung***: Vermutung, die aus der Messung an konkreten Beispielen abgeleitet wird
- ***Voraussetzungen***: Zusammenstellung aller für den Beweis nötigen Aussagen, die sich als allgemein bekannt vorausgesetzt aus den geometrischen Ortslinien und Ortsbereichen und ihren Beziehungen zueinander ableiten lassen
- ***Beweis***: analoge Schlussfolgerungen aus den Voraussetzungen auf die Behauptung

Begründung mithilfe von Vektoren

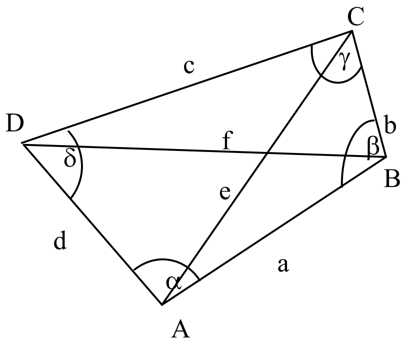
Strecken sind zueinander parallel, wenn die entsprechenden Vektoren durch die Endpunkte der Strecken Repräsentanten desselben Vektors sind.
Strecken sind gleich lang, wenn die entsprechenden Vektoren betragsgleiche Koeffizienten aufweisen.

Beispiel: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF}$

Vierecke

Bezeichnungen:

konvexes Viereck



Vierecke mit Umkreis - Sehnenvierecke:

Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der vier Seiten.

Die Summen zweier gegenüberliegender Seiten sind gleich groß. (a + c = b + d)

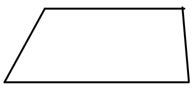
Vierecke mit Inkreis - Tangentenvierecke:

Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der vier Innenwinkel.

Die Summe zweier gegenüberliegender Winkel beträgt 180 °. ($\alpha + \gamma = ß + \delta$)

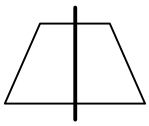
Sonderformen: / **Beschreibung:**

Trapez



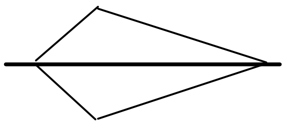
2 parallele Grundseiten

Gleichschenkliges Trapez



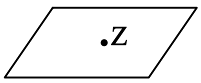
2 gleich lange Schenkel - die an den Schenkeln anliegenden Winkel ergeben zusammen 180 ° - die Diagonalen sind gleich lang - lotsymmetrisch
Umkreis

Drachen



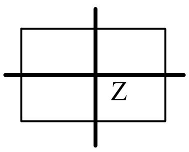
Je 2 von der Symmetrieachse ausgehende Seiten sind gleich lang - die der Symmetrieachse gegenüberliegenden Winkel sind gleich groß - die Symmetrieachse steht auf der 2. Diagonalen senkrecht und halbiert diese - diagonalsymmetrisch
Inkreis

Parallelogramm



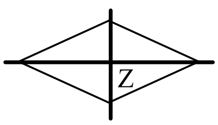
Je 2 gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel -
Je 2 gegenüberliegende Winkel sind gleich groß -
die Diagonalen halbieren sich gegenseitig -
punktsymmetrisch

Rechteck



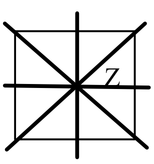
Sonderform von gleichschenkligem Trapez und Parallelogramm
4 rechte Winkel - lot- und punktsymmetrisch - 2 Symmetrieachsen

Raute



Sonderform von Drachen und Parallelogramm
4 gleich lange Seiten - diagonal- und punktsymmetrisch
2 Symmetrieachsen

Quadrat



Sonderform von Rechteck und Raute
4 Symmetrieachsen